5.7 Basisauswahl- und Ergänzungssatz

V VR

$\mathcal{E} := (\underline{v}_i)_{i\in E}$ Erzeugendensystem, darin

$\mathcal{U} := (\underline{v}_i)_{i\in U}$ linear unabhängig, $U \subseteq E$

Dann können wir Vektoren aus $\mathcal{E}$ **auswählen**, die $\mathcal{U}$ zu einer Basis **ergänzen**.

Insbesondere:

Jedes linear unabhängige Tupel lässt sich zu einer Basis ergänzen. (wähle $\mathcal{E} := (\underline{v})_{\underline{v}\in V}$).

Aus jedem Erzeugendensystem lässt sich eine Basis auswählen (wähle $\mathcal{U} := ()$).

Insbesondere:

$$\boxed{\text{Hauptsatz der linearen Algebra: Jeder Vektorraum hat eine Basis.}}$$

(wähle $\mathcal{E} := (\underline{v})_{\underline{v}\in V}$ und $\mathcal{U} := ()$)

5.8 Dimensionssatz:
Je zwei Basen $(\underline{v}_i)_{i\in B}$, $(\underline{w}_i)_{i\in B'}$ eines VRs haben dieselbe Länge (d.h. $|B| = |B'|$).

5.9 Def: Ein VR ist endlich erzeugt/endlich-dimensional, wenn er ein endliches Erzeugendensystem/eine endliche Basis besitzt.

(5.7 zeigt: diese beiden Bedingungen sind äquivalent.)

5.10 Def: Die Dimension $\dim_K V$ eines K-VRs ist die Länge einer Basis $(\underline{v}_i)_{i\in B}$, also die Kardinalität von B.

(5.8 zeigt: das ist wohldefiniert.)

z.B.: $\dim_K(K^d) = d$

$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$

$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ (Basis z.B. $(1, i)$)

($\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C})$ unendlich)

Wir werden Basisauswahl- und Ergänzungs- und Dimensionssatz „nur" im endlich-erzeugten Fall beweisen. Der allgemeine Fall benötigt mehr Mengentheorie.

Beweis zu Basisauswahl- und Ergänzungssatz 5.7, endlich erzeugter Fall:

Konstruiere schrittweise

$$U = B_0 \subsetneq B_1 \subsetneq B_2 \subsetneq \dots \subseteq \underset{\text{endlich}}{E}$$

mit $(\underline{v}_i)_{i \in B_k}$ linear unabhängig.

SCHRITT 0: $B_0 := U$.

SCHRITT $k+1$: Sei B_k bereits konstruiert.

Falls $(\underline{v}_i)_{i \in B_k}$ Erzeugendensystem:

$B := B_k$. FERTIG.

Falls nicht, $\exists\ \underline{v}_j$ mit $j \in E \setminus B_k$

$$\underline{v}_j \in V \setminus \langle \{\underline{v}_i \mid i \in B_k\} \rangle.$$

Nach Ergänzungslemma 5.5 ist

$$(\underline{v}_j, \underline{v}_i)_{i \in B_k}$$

immer noch linear unabhängig.
Wähle also $B_{k+1} := B_k \cup \{j\}$. $\square$

Konstruktiv!

5.11 Steinitzsches Austauschlemma

$\mathcal{B} = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_d)$ Basis von V

$\underline{u} = s_1 \underline{b}_1 + \dots + s_d \underline{b}_d$

Ist $s_k \neq 0$ (für ein $k \in \{1, \dots, d\}$), so ist auch

$$\mathcal{B}' := (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_{k-1}, \underline{u}, \underline{b}_{k+1}, \dots, \underline{b}_d)$$

eine Basis von V.

Beispiel: $\big(\underbrace{\binom{1}{0}}_{\underline{b}_1}, \underbrace{\binom{0}{1}}_{\underline{b}_2}\big)$ Basis von $\mathbb{R}^2$

s_1, s_2

$\left(\binom{1}{0}, \binom{2}{3}\right)$ Basis von $\mathbb{R}^2$

$\left(\binom{2}{3}, \binom{0}{1}\right)$ Basis von $\mathbb{R}^2$

$\left(\binom{1}{0}, \binom{0}{2}\right)$ Basis von $\mathbb{R}^2$

($\left(\binom{0}{2}, \binom{0}{1}\right)$? – keine Basis von $\mathbb{R}^2$)

Beweis:

Löse nach $\underline{b}_k$ auf:

$$\underline{b}_k = s_k^{-1}\underline{y} + (-s_k^{-1}s_1)\underline{b}_1 + \ldots + (-s_k^{-1}s_{k-1})\underline{b}_{k-1} + (-s_k^{-1}s_{k+1})\underline{b}_{k+1} + \ldots + (-s_k^{-1}s_d)\cdot\underline{b}_d$$

$$\in \langle \mathcal{B}' \rangle$$

Außerdem (offensichtlich)

$\underline{b}_i \in \langle \mathcal{B}' \rangle$ für $i \neq k$, also

$V = \langle \mathcal{B} \rangle \subseteq \langle \mathcal{B}' \rangle$.

Das zeigt: $\mathcal{B}'$ Erzeugendensystem.

$\mathcal{B}'$ außerdem linear unabhängig:

Sei $\left(\sum_{i:\, i\neq k} t_i \cdot \underline{b}_i\right) + t \cdot \underline{y} = \underline{0}$.

Setze Def. von $\underline{y}$ ein:

$$\left(\sum_{i:\, i\neq k} (t_i + t s_i)\underline{b}_i\right) + t\cdot s_k \cdot \underline{b}_k = \underline{0}$$

Da $\mathcal{B}$ Basis ist, folgt:

$t_i + t s_i = 0 \quad \forall i \neq k$ und $\underbrace{t \cdot s_k = 0}$.

② $\Downarrow t = 0$ ① $\Downarrow s_k \neq 0$

$t_i = 0 \quad \forall i \neq k$ $\qquad t = 0$

$\square$

5.12 Austauschsatz

nicht konstruktiv

$\mathcal{B} = (\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_d)$ Basis von V,

$\mathcal{U} = (\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_\ell)$ linear unabhängig in V.

Dann ist $\ell \leq d$, und es gibt

$$\underline{b}_{i_1}, \ldots, \underline{b}_{i_\ell} \text{ in } \mathcal{B}$$

derart, dass man durch Austausch von

$$\underline{b}_{i_j} \text{ gegen } \underline{u}_j \quad (\text{für alle } j \in \{1, \ldots, \ell\})$$

eine neue Basis erhält.

Beweis: per Induktion über ℓ.

IA: $\ell = 0$.

IV: Satz gilt, falls $\mathcal{U}$ Länge ℓ hat.

IS: Satz gilt für $\mathcal{U}$ der Länge $\ell + 1$:

$\mathcal{U} = (\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_\ell, \underline{u}_{\ell+1})$ linear unabh.

Nach Umnummerierung gilt nach IV:

$$\cancel{\underline{b}_1}, \ldots \cancel{\underline{b}_\ell}$$

$$\mathcal{B}_\ell := (\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_\ell, \underline{b}_{\ell+1}, \ldots, \underline{b}_d) \text{ Basis.}$$

zz: $d \geq \ell + 1$, und wir können einen der Vektoren $\underline{b}_{\ell+1}, \ldots, \underline{b}_d$ durch $\underline{u}_{\ell+1}$ ersetzen.

Da $\mathcal{B}_\ell$ Basis ist:

$$\underline{u}_{\ell+1} = \sum_{j=1}^{\ell} s_j \cdot \underline{u}_j + \sum_{i=\ell+1}^{d} s_i \cdot \underline{b}_i$$

Da $\mathcal{U}$ linear unabhängig ist, $\exists\, k \in \{\ell+1, \dots, d\}$ mit $s_k \neq 0$.
Insbesondere $d \geq \ell+1$, und nach Steinitzschem Austauschlemma 5.11 können wir in $\mathcal{B}_\ell$ $\underline{b}_k$ durch $\underline{u}_{\ell+1}$ ersetzen. $\square$

Beweis des Dimensionssatzes 5.8, für endlich-erzeugten VR V:

Wissen: V besitzt <u>eine</u> endliche Basis $\mathcal{B} = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_d)$.

Sei $\mathcal{B}'$ weitere Basis.

Wende Austauschsatz an auf:

(a) Basis $\mathcal{B}$
$\mathcal{U} = (\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_\ell)$
Tupel aus beliebig endlich vielen Vektoren aus $\mathcal{B}'$
$\Big\}$ $\ell \leq d$

Also hat $\mathcal{B}'$ **höchstens** Länge d.

(b) Basis $\mathcal{B}'$
$\mathcal{U} := \mathcal{B}$
$\Big\}$ $\mathcal{B}'$ hat **mindestens** Länge d. $\square$

5.13 Satz (Basiskriterium)

V endlich-dimensionaler VR

Für ein Tupel $\mathcal{B} = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_d)$ von Vektoren aus V sind äquivalent:

(a) $\mathcal{B}$ Basis von V

(b) $\mathcal{B}$ linear unabhängig und $d = \dim V$.

(c) $\mathcal{B}$ ist Erzeugendensystem von V und $d = \dim V$.

Beweis:

($a \Rightarrow b$) und ($a \Rightarrow c$) klar

($a \Leftarrow b$) Nach Basisergänzungssatz 5.7 können wir $\mathcal{B}$ zu einer Basis $\mathcal{B}'$ ergänzen.
Länge von $\mathcal{B}' = \dim V$
$= d$

Also $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$.

($a \Leftarrow c$) Nach Basisauswahlsatz 5.7 können wir aus $\mathcal{B}$ eine Basis $\mathcal{B}'$ auswählen.
Länge von $\mathcal{B}' = \dim V$
$= d$

Also $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$. $\square$